فصل چهارم: کاربرد مشتق

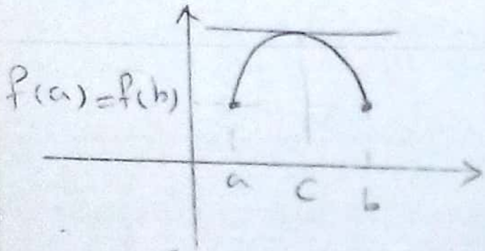
کاربرد اول: قضیه رل و قضیه مقدار میانگین

قضیه رل: اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته و در بازه (a,b) مشتق پذیر و $f(a)=f(b)$ در این صورت

وجود دارد

$$\exists c\in(a,b) \ni f'(c)=0$$

به عبارتی اگر $f(a)=f(b)$ در این صورت دست کم در یک نقطه بین a تا b، خط مماس افقی است.



تمرین: در بازه های داده شده شرایط قضیه رل را برای توابع زیر تحقیق کنید.

$y=x^2-4x+3$: بازه $[1,3]$

$y=x^3-2x^2-x+2$: " $[1,2]$

$y=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ بازه $[0,2]$

تمرین: ثابت کنید هر چند جمله ای از درجه n، حداکثر n ریشه دارد.

تمرین: اگر f و g دو تابع مشتق پذیر باشند طوری که نمودار آنها در دو نقطه باهم تلاقی کنند، آنگاه دست کم در یک نقطه $f'=g'$ خواهد بود.

تذکر: برای برقراری نتیجه قضیه رل باید همه شرایط آن یعنی پیوستگی بر بازه $[a,b]$ و مشتق پذیری بر بازه (a,b) و $f(a)=f(b)$، برقرار باشد.

تمرین: برقراری شرایط قضیه رل در موارد زیر تحقیق کنید.

$f(x)=\begin{cases}x & 0\leq x\leq 1\\ 2-x & 1\leq x\leq 2\end{cases}$ $\quad f(x)=\begin{cases}x & 0\leq x<1\\ 0 & x=1\end{cases}$ $\quad f(x)=x,\ [0,1]$

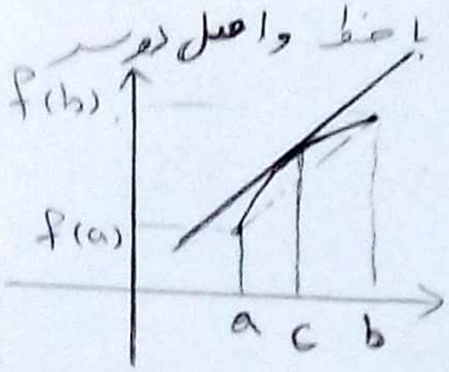
$y=1-\sqrt[3]{x^2}\quad [-1,1]$ $\qquad y=1-|x|\quad [-1,1]$

$y=3x^2-5\quad [-2,0]$ $\qquad y=\ln(\sin(x))\quad \left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

قضیه مقدار میانگین: اگر $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ پیوسته در بازه $[a,b]$ و در بازه (a,b) مشتق پذیر باشد در این صورت

$$\exists c\in(a,b) \ni f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

در واقع بنابر این قضیه اگر f در بازه [a,b] پیوسته و در بازه (a,b) مشتق‌پذیر باشد آنگاه دست کم در یک نقطه بین a تا b خط مماس با خط واصل دو سر منحنی موازی خواهد بود.



مثال ۱: به کمک قضیه مقدار میانگین روابط زیر را ثابت کنید.

$|\sin(\alpha)-\sin(\beta)| \leq |\alpha-\beta| \quad , \forall \alpha,\beta$

$(1+x)^n \geq 1+nx \quad , \forall x\geq -1, \forall n\in \mathbb{N}$

$1-\frac{1}{x} < \ln(x) < x-1 \quad , \forall x>1$

$tg(x) > x \quad 0<x<\pi/2$

$ny^{n-1}(x-y) \leq x^n-y^n \leq nx^{n-1}(x-y) : \forall n\in\mathbb{N} , x\geq y>0$

$|tg(\alpha)-tg(\beta)| \geq |\alpha-\beta| \quad \frac{\pi}{2}>\alpha>\beta\geq 0$

حل: مورد اول حل می‌شود بقیه به عنوان تمرین.

$f(x)=\sin(x)$

اگر $\alpha\neq\beta$ (مثلاً $\beta>\alpha$) تابع f بر بازه $[\alpha,\beta]$ پیوسته و در بازه (α,β) مشتق‌پذیر است بنابراین

$\exists \gamma\in(\alpha,\beta) \ni \frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=f'(\gamma)$

$f(x)=\sin(x) \Longrightarrow f'(x)=\cos(x) \Longrightarrow$

$\frac{\sin(\alpha)-\sin(\beta)}{\alpha-\beta}=\cos(\gamma) \Longrightarrow |\sin(\alpha)-\sin(\beta)|=|\alpha-\beta||\cos(\gamma)|$

$\leq |\alpha-\beta|\times 1$

$=|\alpha-\beta|$

$\Longrightarrow |\sin(\alpha)-\sin(\beta)| \leq |\alpha-\beta|$

و اگر $\alpha=\beta$ واضح است زیرا $0 \leq 0$.

مثال: نقطه c مطرح در قضیه مقدار میانگین را برای توابع $y=\sqrt{x}$ و $y=x^3+x$ در بازه $[0,1]$ تعیین کنید.

حل،

* ۱۵۳ $y=\sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

برای یک $0<c<1$.

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f'(c)$$

$$\frac{\sqrt{1}-\sqrt{0}}{1-0} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{c}} = 1 \Rightarrow \sqrt{c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{c=\frac{1}{4}}$$

* $y = x^3 + x \Longrightarrow y' = 3x^2+1$

برای یک c بین 0 تا 1.

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f'(c)$$

$$\frac{(1^3+1)-(0)}{1-0} = 3c^2+1 \Rightarrow 3c^2+1 = 2 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\xRightarrow{0<c<1} \boxed{c = \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

تمرین: نقطه c مربوط به قضیه مقدار میانگین را در موارد زیر بر بازه های داده شده تعیین کنید.

$$y = \begin{cases} 2x-3 & 0\leq x\leq 2 \\ 6x-x^2-7 & 2\leq x\leq 3 \end{cases} \quad [0,3]$$

$$y = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & 0\leq x\leq 1 \\ \frac{1}{x} & 1\leq x\leq 2 \end{cases} \quad [0,2]$$

$y = x^3-5x^2+3x \ ; \ [1,3]$

$y = \sqrt{x} \ : \ [0,4]$

$y = x^2 \ ; \ [3,4]$

$y = \frac{2}{x+3} \ ; \ [0,1]$

$y = 4x^3-5x^2+x-2 \ : \ [0,1]$

$y = \operatorname{Ln}(x) \ ; [1,3]$

تمرین: آیا تابع $y = \begin{cases} x & x<1 \\ \frac{1}{x} & x\geq 1 \end{cases}$ در شرایط قضیه مقدار میانگین بر بازه $[0,2]$ صدق می کند.

تمرین: ثابت کنید اگر توابع f و g دو بار مشتق پذیر و سه بار مشتق پذیر و نمودار های f و g در دو نقطه مماس باشند ثابت کنید دست کم در یک نقطه $f''' = g'''$.

مثال: به کمک قضیه مقدار میانگین یک محدوده تقریبی برای هر یک از مقادیر زیر تعیین کنید.

$\sqrt{65}$ ، $\cos(43^\circ)$ ، $\sin(55^\circ)$ ، $\sqrt[3]{65}$

15)

$f(x)=\sqrt{x}$

حل: 65 نزدیک به مقدار 64 است که براحتی می‌توان از آن جذر گرفت، تابع $y=\sqrt{x}$ پیوسته و مشتق‌پذیر است بنابراین در بازه $(64,65)$ نقطه‌ای مانند c موجود است به طوری که

$$\frac{\sqrt{65}-\overset{8}{\sqrt{64}}}{\underbrace{65-64}_{1}}=f'(c)$$

$$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(c)=\frac{1}{2\sqrt{c}}$$

$$64<c<65 \Rightarrow 64<c<81 \Rightarrow 8<\sqrt{c}<9 \Rightarrow \frac{1}{16}>\frac{1}{2\sqrt{c}}>\frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{18}<\frac{\sqrt{65}-8}{1}<\frac{1}{16} \Rightarrow 8+\frac{1}{18}<\sqrt{65}<8+\frac{1}{16}$$

$$f(x)=\cos(x) \Longrightarrow f'(x)=-\sin(x) \Rightarrow f'(c)=-\sin(c)$$

$30^\circ<43^\circ<45^\circ$ c بین 45° و 43°

$$\frac{\cos(45^\circ)-\cos(43^\circ)}{45^\circ-43^\circ}=-\sin(c)$$

$$43^\circ<c<45^\circ \Rightarrow 30^\circ<c<45^\circ \Rightarrow \frac{1}{2}<\sin(c)<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Longrightarrow -\frac{1}{2}>-\sin(c)>-\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\cos(45^\circ)-\cos(43^\circ)}{2^\circ}<-\frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos(43^\circ)}{2^\circ}<-\frac{1}{2} \Longrightarrow$$

اول باید معادل 2° را برحسب رادیان بنویسیم تا واحد نداشته باشد

$$\frac{2^\circ}{180^\circ}=\frac{R}{\pi} \Rightarrow R=\frac{2\pi}{180}=\frac{\pi}{90} \Longrightarrow$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos(43^\circ)}{\frac{\pi}{90}}<-\frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{\pi}{90}\times\frac{1}{2}<\cos(43^\circ)-\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\pi}{90}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi}{180}<\cos(43^\circ)<\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{90}$$

نتیجه: قضیه مقدار میانگین:

الف) اگر f بر (a,b) مشتق‌پذیر و f پیوسته بر $[a,b]$ آنگاه f الزاماً محدود است بر بازه $[a,b]$.

۱۵۵

ب) اگر $f'<0$ بر (a,b) و f پیوسته بر $[a,b]$ آنگاه f اکیداً نزولی بر بازه $[a,b]$.

ج) اگر $f'=0$ بر (a,b) و f پیوسته باشد بر $[a,b]$ آنگاه f تابع ثابت است بر بازه $[a,b]$.

مثال: ثابت کنید که $y=x+\sin^2(\frac{x}{3})-8$ روی $\mathbb{R}$ دقیقاً یک ریشه دارد.

حل:

$f(0)=0+0-8<0$

$f(3\pi)=3\pi+\cancel{\sin^2(\pi)}-8>0$ یعنی $[0,3\pi]$

طبق پیوستگی f، f در این بازه دست کم یک ریشه دارد. از طرفی

$f'(x)=1+2\sin(\frac{x}{3})\cos(\frac{x}{3})\times\frac{1}{3}=1+\frac{1}{3}\sin(\frac{2}{3}x)$

$-1\le\sin(\frac{2}{3}x)\le 1 \Rightarrow 1-\frac{1}{3}\le 1+\frac{1}{3}\sin(\frac{2}{3}x)\le 1+\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{2}{3}\le f'(x)\le \frac{4}{3}$

$\Rightarrow f'>0$

پس f اکیداً صعودی است پس یک به یک است و بنابراین فقط در یک نقطه صفر می‌شود یعنی دقیقاً یک ریشه دارد.

تمرین: ۱- دامنه‌ی تابع $y=tg^{-1}(x)+tg^{-1}(\frac{1}{x})$ را به طور شفاف‌تر بیان کنید.

۲- ثابت کنید $\sin^{-1}(x)+\cos^{-1}(x)=\frac{\pi}{2}$.

۳- ثابت کنید معادله‌ها $3x^5+15x-8=0$، $x^3+3x+1=0$ و $2x^3-3x^2+6x+6=0$ دقیقاً یک ریشه دارند.

مثال: به کمک قضیه‌ی مقدار میانگین اولاً ثابت کنید برای هر $x>0$، $\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x$ و ثانیاً، به کمک قسمت اول، تقریبی از $\ln(1+e)$ را تعیین کنید.

حل: اولاً

$y=\ln(x)\Rightarrow y'=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(c)=\frac{1}{c}$

$\forall x>0:\ \frac{\ln(1+x)-\cancel{\ln(1)}}{\underbrace{(1+x)-1}_{x}}=\frac{1}{c}$ برای $1<c<1+x$

$1<c<1+x\Rightarrow 1>\frac{1}{c}>\frac{1}{1+x}$

$\Rightarrow \frac{1}{1+x}<\frac{\ln(1+x)}{x}<1 \xRightarrow{x>0} \frac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x$

اگر قرار دهیم $x=e$، داریم:

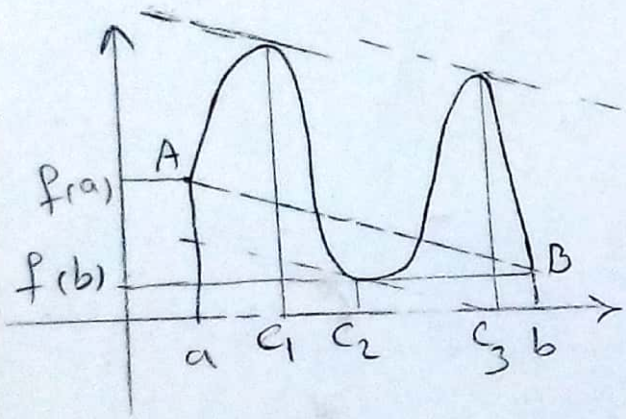
$\frac{e}{e+1}<\ln(1+e)<e$

توضیح:

الف: برای برقراری قضیه مقدار میانگین باید همه شرایط ۲) برقرار باشد.

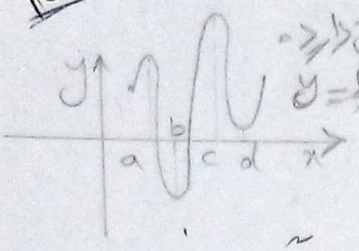
ب: در این قضیه وجود نقطه‌ی c تضمین می‌شود ولی مکان دقیق آن معلوم نیست. فقط می‌دانیم که نقطه‌ای بین ابتدا تا انتهای بازه است.

ج: نقطه‌ی c لزوماً منحصر به فرد نیست.



در شکل روبرو، در سه نقطه‌ی c_1، c_2 و c_3 خط مماس و خط AB موازی‌اند.

f در x=a, x=c ماکزیمم نسبی و در x=c ماکزیمم مطلق و در x=b و x=d مینیمم نسبی و در x=b مینیمم مطلق دارد.



کاربرد دوم مشتق: رسم دقیق نمودار یک تابع

تعریف: اکسترمم مطلق و نسبی تابع

می‌گوییم تابع f در نقطه‌ی $c\in S$ دارای ماکزیمم مطلق است هرگاه:

$$\forall x\in S,\quad f(x)\le f(c)$$

و به طور مشابه f در نقطه‌ی c دارای مینیمم مطلق است هرگاه:

$$\forall x\in S,\quad f(x)\ge f(c)$$

و اگر f در c دارای ماکزیمم یا مینیمم مطلق است می‌گوییم f در c دارای اکسترمم مطلق است و اگر f چنان باشد که برای هر x در یک همسایگی نقطه‌ی c داشته باشیم:

$f(x)\le f(c)$ می‌گوییم f در c دارای ماکزیمم نسبی است و به طور مشابه مینیمم نسبی نیز تعریف می‌شود، یعنی اگر برای هر x در یک همسایگی c داشته باشیم $f(x)\ge f(c)$، می‌گوییم f در c دارای مینیمم نسبی است و اگر f در c دارای ماکزیمم یا مینیمم نسبی باشد، می‌گوییم f در c اکسترمم نسبی دارد.

قضیه: مشتق اکسترمم نسبی

اگر f در $x=c$ دارای اکسترمم نسبی باشد و f در c مشتق‌پذیر آنگاه $f'(c)=0$.

بنابراین

f در c اکسترمم نسبی دارد $\Longrightarrow$ $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ وجود ندارد

تعریف: نقطه‌ی بحرانی نمودار تابع

نقطه‌ی $x=c\in D_f$ را نقطه‌ی بحرانی نمودار تابع می‌گوییم هرگاه $f'(c)=0$ یا f' در این نقطه موجود نباشد.

مثال: نقاط بحرانی نمودار تابع زیر را مشخص کنید.

$$y=\begin{cases}-x^2-2x+4 & x\le 1\\ -x^2+6x-4 & x>1\end{cases}$$

حل:

$$y'=\begin{cases}-2x-2 & x<1\\ -2x+6 & x>1\\ ? & x=1\end{cases}$$

۱۵)

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{-x^2+6x-4-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\overbrace{-x^2+6x-5}^{-(x-1)(x-5)}}{x-1}$$

$f(1)=-1-2+4=1$

$x^2-6x+5=(x-1)(x-5)$

$$=-\lim_{x\to 1^+}(x-5)=-(1-5)=+4$$

$$f'_-(1)=(-x^2-2x+4)'\Big|_{x=1}=-2x-2\Big|_{x=1}=-4$$

$\Longrightarrow f'_+(1)\neq f'_-(1)\Longrightarrow$ $f'(1)$ وجود ندارد $\Longrightarrow$ $x=1$ یک نقطه بحرانی است

$$\Longrightarrow y'=\begin{cases}-2x-2 & x<1\\ -2x+6 & x>1\end{cases}$$

$$y'=0 \begin{cases}\xrightarrow{x<1} -2x-2=0 \Longrightarrow x=-1\\ \xrightarrow{x>1} -2x+6=0 \Longrightarrow x=3\end{cases}$$

بنابراین $x=-1$ ، $x=3$ و $x=+1$ هر سه نقاط بحرانی نمودار تابع‌اند!

تمرین) نقاط بحرانی نمودار توابع زیر را تعیین کنید (در صورت وجود).

$y=\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$, $y=\sqrt{2x-x^2}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}}$, $y=\sqrt[3]{x}$

$y=\sqrt[3]{x^2}$, $y=|x+2|-|x-3|$

قضیه ۱۱) آزمون مشتق اول برای یافتن اکسترمم نسبی

اگر تابع f بر بازه I که در نقطه c مشتق‌پذیر باشد و در نقطه c، f' از + به − و یا از − به + تغییر علامت دهد در این صورت به ترتیب f در c دارای ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی است

x		c	
f'	+		−
f	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$

Max

x		c	
f'	−		+
f	$\searrow$	$f(c)$	$\nearrow$

Min

(۱۵۹)

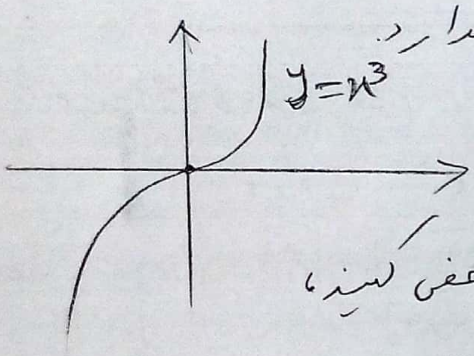
از آنجا که عکس قضیه مشتق اکسترموم نسبی یک قضیه نیست، به این معنی که برخی از نقاط بحرانی تابع ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی هستند و برخی نیستند بنابراین با کمک قضیه گفته شده و قضیه بعد سعی می‌کنیم از بین نقاط بحرانی، نقاط اکسترموم نسبی را جدا کنیم.

قضیه مشتق اکسترموم نسبی $\equiv$ (نقطه اکسترموم نسبی a است $\Longrightarrow$ نقطه بحرانی a است) ، $\not\Longleftarrow$

مثال: در تابع $y=x^3$، $y'=3x^2$

$y'=0 \Longrightarrow x=0$ نقطه بحرانی نمودار

اما نمودار تابع $y=x^3$ در $x=0$ اکسترموم نسبی ندارد.
و مطابق شکل، تابع اکیداً صعودی است.



مثال: نقاط بحرانی و اکسترموم نسبی تابع‌های زیر را مشخص کنید (در صورت وجود).

$$y_1 = x^2\sqrt{5-x} \quad , \quad y_2 = \begin{cases} 3x^2 & x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x^2} & x > 0 \end{cases}$$

حل:

$$D_{y_1} = \{x \in R \mid 5-x \geq 0\} = (-\infty, 5]$$
$$x \leq 5$$

$$y_1' = 2x\sqrt{5-x} + x^2 \times \frac{-1}{2\sqrt{5-x}} = \frac{4x(5-x)-x^2}{2\sqrt{5-x}} = \frac{20x-5x^2}{2\sqrt{5-x}}$$
$$20x-4x^2-x^2$$

$$y_1' = 0 \Rightarrow 20x-5x^2=0 \Longrightarrow 5x(4-x)=0$$
$$x=0 \quad x=4$$

$$y_1'(5) = \lim_{x\to 5^-} \frac{x^2\sqrt{5-x} - \cancel{y(5)}^{\,0}}{x-5} = \lim_{x\to 5^-} \frac{x^2\sqrt{5-x}}{-(5-x)} = \lim_{x\to 5^-} \frac{-x^2}{\sqrt{5-x}} = -\infty$$

در نقاط $x=0$ و $x=4$، $f'=0$ و در $x=5$، $f'=-\infty$ که البته $x=0$ و $x=4$ در تعریف نقطه بحرانی صدق می‌کنند و به کمک آزمون مشتق اول داریم:

x	$-\infty$		0		4		5
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	0

$x=0 \Longrightarrow y_1(0)=0$
$x=4 \Longrightarrow y_1(4)=16$

Min: 0 Max: 16

سایر موارد (به عنوان) تمرین و آنها رسم شود.

$y = \frac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$, $y = \frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$

$y = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 12$,

$y = x(x+1)^3(x-3)^2$

$y = 3\sqrt[3]{x^2} - x^2$, $y = \sqrt[3]{(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)^2}$

$y = \begin{cases} e^{1/x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, $y = x^2 \ln(x)$, $y = x \ln^2(x)$, $y = \begin{cases} 3x+5 & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$

$y = \begin{cases} 2x^2+3 & x \neq 0 \\ 4 & x = 0 \end{cases}$ $y = \sin(3x) - 3\sin(x)$, $y = \frac{4x}{x^2+4}$,

$y = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 - 36x}$ $y = \frac{14}{x^4 - 8x^2 + 2}$, $y = \frac{50}{3x^4 + 8x^3 - 18x^2 + 60}$

تمرین: نقاط اکسترمم نسبی و مطلق توابع زیر را بر بازه‌های داده شده تعیین کنید.

$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$: $[-2, 5/2]$ $y = xe^{-x}$: $(0, +\infty)$

$y = x^2 \ln(x)$: $[1, e]$ $y = \sqrt{(1-x^2)(1+2x^2)}$: $[-1, 1]$

$y = \sin(x)\sin(2x)$ روی $\mathbb{R}$ $y = x + \sqrt{x}$: $[0, 4]$

$y = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$: $[-2, 4]$, $y = \sqrt{4 - x^2}$: $[-2, 2]$

$y = tg^{-1}(x) - \frac{\ln(x)}{2}$: $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}]$, $y = \sin(2x) + 2\sin(x)$: $[0, \frac{3\pi}{2}]$

$y = x - 2\ln(x)$: $[1, e]$ $y = \begin{cases} 2x^2 + \frac{2}{x^2} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$: $[-2, 2]$

تمرین: اعداد a و b را طوری تعیین کنید که $y = \frac{ax+b}{(x-1)(x-4)}$ در نقطه‌ی $(2, -1)$ (در صورت وجود) دارای اکسترمم نسبی باشد.

تمرین: بازه‌های صعود و نزول و اکسترمم‌های نسبی توابع زیر را مشخص کنید. به عبارتی جدول تغییرات این توابع را رسم کنید.

$y = 1 - x^2$, $y = x - |x|$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \cos(\frac{\pi}{x})$

تمرین: کوتاه‌ترین فاصله بین سهمی $y = x^2$ و خط $x - y - 2 = 0$ را تعیین کنید.

توضیح: برای یافتن اکسترمم مطلق تابع باید مقدار تابع را در نقاط ابتدایی و انتهایی حوزه‌ی مشخص شده نیز بدست آوریم. به طور مثال در تابع

$y = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$

141

$y' = x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Longrightarrow$ در بازه‌ی $[-2,4]$

$x(x^2 - 2x - 3) = x(x-3)(x+1) = 0$

$\Longrightarrow x = 0$ یا $x = 3$ یا $x = -1$ سه نقطه‌ی بحرانی تابع

x	-2		-1		0		3		4
x^2-2x-3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^3-2x^2-3x		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\frac{16}{3}$	$\searrow$	$\frac{17}{12}$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\frac{37}{4}$	$\nearrow$	$-\frac{2}{3}$
			Min نسبی		Max نسبی		Min نسبی		

ماکزیمم مطلق تابع در این بازه در نقطه‌ی $(-2,\frac{16}{3})$ و مینیمم مطلق در نقطه‌ی $(3,-\frac{37}{4})$ واقع شده است.

$Max\{\frac{16}{3}, \frac{17}{12}, 2, -\frac{37}{4}, -\frac{2}{3}\} = \frac{16}{3}$ و $Min\{\frac{16}{3}, \frac{17}{12}, 2, -\frac{37}{4}, -\frac{2}{3}\} = -\frac{37}{4}$

از آنجا که در بسیاری از موارد تعیین علامت y' کاری وقت‌گیر و یا کمی طولانی می‌شود، به کمک قضیه‌ی زیر (به وسیله‌ی علامت y'') اکسترمم نسبی را در نقاط بحرانی که $f'=0$ باشد تشخیص می‌دهیم.

قضیه: آزمون مشتق دوم برای یافتن اکسترمم نسبی تابع

اگر $f'(c)=0$ و $f''(c)>0$ باشد، f در c دارای مینیمم نسبی است و اگر $f''(c)<0$، f در c ماکزیمم نسبی دارد و اگر $f''(c)$ غیرموجود و یا صفر باشد، این آزمون بی‌نتیجه است.

مثال: نقاط **بحرانی** هر یک از توابع زیر را تعیین کرده و سپس به کمک قضیه‌ی آزمون مشتق دوم در صورت امکان اکسترمم‌های **نسبی** را مشخص کنید.

* $y = \cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) \quad 0 < x \le 2\pi$

$y' = -\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x) = 0 \Longrightarrow tg(x) = \sqrt{3} = tg(\frac{\pi}{3})$

$\xRightarrow{0<x\le 2\pi} x = \frac{\pi}{3}$ یا $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$y'' = -\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x)$

$y''(\frac{\pi}{3}) = -\cos(\frac{\pi}{3}) - \sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{-1}{2} - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -2 < 0$

f در $\frac{\pi}{3}$ ماکزیمم نسبی دارد.

$y''(\frac{4\pi}{3}) = -\cos(\frac{4\pi}{3}) - \sqrt{3}\sin(\frac{4\pi}{3}) = +\frac{1}{2} + \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 > 0$

f در $\frac{4\pi}{3}$ مینیمم نسبی دارد.

تمرین
تمرین

* $y = 2x^3 - 15x^2 - 84x + 8$

* $y = 2\sin(x) + \cos(2x)$ $0 \le x \le 2\pi$

* $y = x^4$

$y' = 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$ آزمون مشتق دوم برای این تابع

$y'' = 12x^2 \Rightarrow y''(0) = 0 \Rightarrow$ بی نتیجه است و لذا آزمون مشتق اول را بکار می بریم

x		0	
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	0 Min	$\nearrow$

تمرین: بازه های صعودی و نزولی و نقاط اکسترمم نسبی توابع زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

$y = x^3 + 2x - 5$, $y = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}$, $y = \frac{2x}{1+x^2}$,

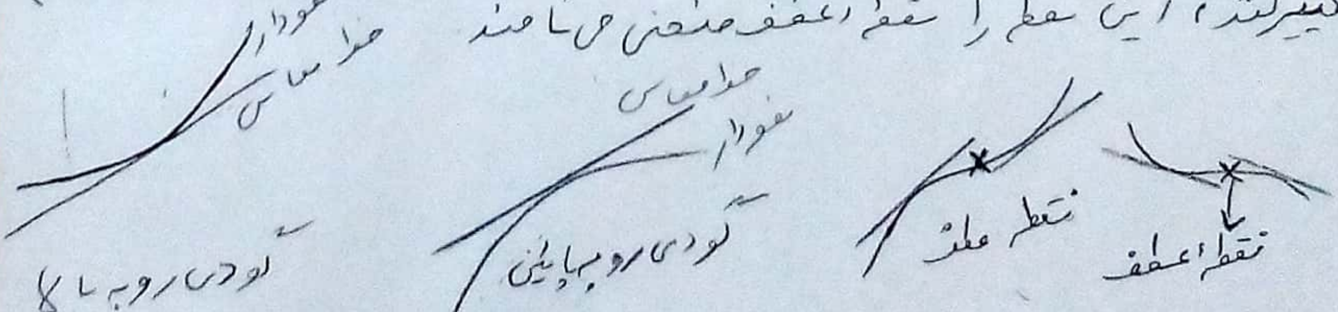
$y = \cos(x) - x$, $y = \cos(\frac{\pi}{x})$, $y = \sin(x) + \cos(x)$; $0 \le x \le \pi/2$

$y = 2\sin(x) + \tan(x) - 3x$: $-\frac{\pi}{2} < x < \pi/2$

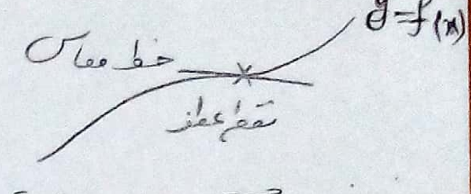
$y = \sin(2x) + 2\sin(x)$; $[0, 2\pi]$

تعریف: جهت گودی منحنی و نقطه عطف

اگر تابع f در هر نقطه از بازه I دارای خط مماس باشد و در تمام این نقاط منحنی بالای خط مماس باشد می گوییم f روی این بازه گودی به سمت بالا دارد و یا جهت تقعر منحنی رو به بالاست و اگر در تمام نقاط این بازه منحنی پایین خط مماس باشد می گوییم گودی منحنی به سمت پایین است و یا جهت تقعر رو به پایین است و اگر در نقطه ای منحنی دارای خط مماس باشد و جهت گودی منحنی در این نقطه تغییر کند، این نقطه را نقطه عطف منحنی می نامند.



واضح است که در نقطه عطف خط مماس از بالا به پایین و یا برعکس از پایین به بالای منحنی می رود و در نتیجه در این نقطه خط مماس از منحنی عبور می کند.



قضیه: آزمون مشتق دوم برای یافتن جهت تقعر منحنی و نقاط عطف

اگر تابع f بر بازه I دارای مشتق دوم باشد، آنگاه

الف: اگر $f''>0$ بر بازه I، f بر این بازه تقعر رو به بالا دارد.

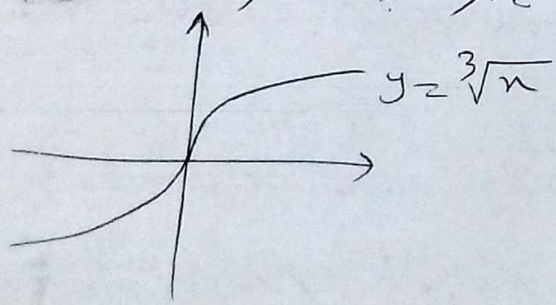
ب: اگر $f''<0$ بر بازه I، f بر این بازه تقعر رو به پایین دارد.

واضح است که اگر c نقطه عطف نمودار باشد و $f''(c)$ موجود، آنگاه $f''(c)\not>0$ و $f''(c)\not<0$ یعنی $f''(c)=0$.

مثال: در تابع $y=\sqrt[3]{x}$،

$$y'=(x^{1/3})'=\frac{1}{3}x^{-2/3}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

قبلاً دیدیم که محور y ها مماس نمودار این تابع در مبدأ است ولی



$y'(0)=+\infty$ و y'' تعریف نمی‌شود.

$$y''=-\frac{2}{9}x^{-5/3}$$

x		0	
y''	+		−
y	∪		∩

مبدأ نقطه عطف منحنی است ولی y'' در این نقطه وجود ندارد.

تمرین: اعداد a، b، c، d و e را چنان تعیین کنید که تابع $y=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ نقطه عطف داشته باشد.

تمرین: نقاط اکسترمم نسبی و نقاط عطف نمودار توابع زیر را (در صورت وجود) تعیین کنید.

$y=x^{2/3}$ و $y=\sqrt[3]{x^2}\,(x^2-4)$، $y=x\sqrt{4-x^2}$

$y=2x^2-4x$، $y=2x^4-2x^2+5$، $y=\frac{x^3}{x+2}$، $y=3+2\cos(3x)$

$y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$، $y=3+\sqrt{2-x}$، $y=|x-1|$، $y=2\sin(x)+\cos(2x)$

$y=\sqrt[3]{x^4}+4\sqrt[3]{x}$، $y=3x^4-8x^3+6x^2+12$، $y=\frac{x}{1+x^2}$، $y=\sin^4(x)+\cos^4(x)$

تمرین: تعیین کنید به ازای چه مقادیری از a منحنی $y=x^4+ax^3+\frac{3}{2}x^2+1$ همیشه مقعر است (تقعر رو به بالا دارد).

۲۴

تمرین: نقاط عطف و جهت تقعر منحنی های زیر را مشخص کنید (در صورت وجود)

$y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ و $y = e^{\sin(x)}$ ؛ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ و $y = \dfrac{Ln^2(x)}{x}$ و $y = x + \sqrt{x^3}$

$y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 12$ و $y = x^4 + x^3 - 18x^2 + 24x - 12$

$y = 4\sqrt{(x-1)^5} + 20\sqrt{(x-1)^3}$ ؛ $x \geq 1$ و $y = x - \sqrt[5]{(x-3)^2}$

مراحل رسم دقیق نمودار یک تابع

برای رسم دقیق نمودار یک تابع مراحل زیر را باید طی کرد:

الف) تعیین دامنه تابع مثلاً تابع $y=f(x)$ و نقاط برخورد تابع با محور های مختصات و یادداشت کردن آنها در یک جدول مانند جدول زیر

$x = 0 \Rightarrow y = ?$

$y = 0 \Rightarrow x = ?$

x	y
$x=0$	?
?	$y=0$

ب) تعیین زوج یا فرد بودن و یا هیچکدام در مورد تابع. اگر زوج باشد نسبت به محور y ها و اگر فرد باشد نسبت به مبدأ مختصات نمودار تابع متقارن است، که البته در بیشتر موارد ممکن است تابع جزو هیچکدام از این دو دسته نباشد (نه زوج نه فرد).

ج) تعیین مجانب های افقی و عمودی و مایل (در صورت وجود) اول مجانب عمودی و سپس مجانب افقی و اگر مجانب افقی موجود نباشد ~~تابع~~ نمودار تابع مجانب مایل داشته باشد که البته این موارد نیز باید در جدول بالا نوشته شود.

x	y
$=0$	?
?	$y=0$
?	?
$+\infty$	?
$-\infty$	$\pm\infty$
?	

د) تعیین بازه های صعودی و نزولی و نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم نسبی نمودار تابع به کمک جدول تغییرات تابع یعنی به کمک تعیین علامت y' و سپس نوشتن نقاط اکسترمم نسبی در جدول بالا (در صورت وجود)، به عبارتی رسم جدول تغییرات تابع (نوشتن آ) در مختصات

هـ) تعیین جهت تقعر منحنی، نقاط عطف نمودار تابع به کمک y'' و جدول بالا.

توضیح ①: در برخی از متون ریاضی یک مرحله اضافه تر از مراحل بالا نیز بررسی می شود (آ) بررسی حوزه های پیوستگی تابع، تعیین نقاط ناپیوستگی تابع.

② در صورتیکه نقاط نوشته شده در جدول بالا کم (صفر) زیاد نبود، یعنی نقاط برخورد با محور ها و اکسترمم نسبی و نقاط عطف می توان برای رسم بهتر منحنی چند نقطه کمکی روی نمودار را نیز حداقل مشخص کرد و از آنها کمک گرفت.

مثال: نمودار تابع $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ را نمودار دقیق رسم کنید.

حل: برای رسم دقیق این نمودار مراحل زیر را طی می‌کنیم.

(۱) $D_f=\mathbb{R}-\{1\}\ ,\quad x=0 \Rightarrow y=-1$

$y=0 \Rightarrow x^2-x+1=0$ ریشه ندارد

x	y
0	-1

(۲) تابع نه زوج و نه فرد می‌باشد

$$f(-x)=\frac{(-x)^2-(-x)+1}{(-x)-1}=\frac{x^2+x+1}{-x-1}$$

(۳) $\lim\limits_{x\to 1} y=\pm\infty \Rightarrow x=1$ خط مجانب قائم نمودار

x	y
0	-1
1	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\pm\infty$ مجانب افقی ندارد

اگر $y=ax+b$ مجانب مایل باشد آنگاه

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-x+1}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2-x}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty} y-ax=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x-1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1-x^2+x}{x-1}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1}=0 \Rightarrow y=ax+b=x$$

مجانب مایل در ∞: $y=x$

(۴)

$$y'=\left(\frac{x^2-x+1}{x-1}\right)'=\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\ ,\quad y'=0 \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow x(x-2)=0$$

$x=0 \quad x=2$ نقاط بحرانی

	x	y
Max	0	-1
	1	$\pm\infty$
	$\pm\infty$	$\pm\infty$
Min	2	3

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	-1	$\searrow$	‖	$\searrow$	3	$\nearrow$
		Max				Min	

(۵)

$(x-1)[(2x-2)(x-1)-2(x^2-2x)]$

$$y''=\left(\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\right)'=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x)\times 2(x-1)}{(x-1)^4}=$$

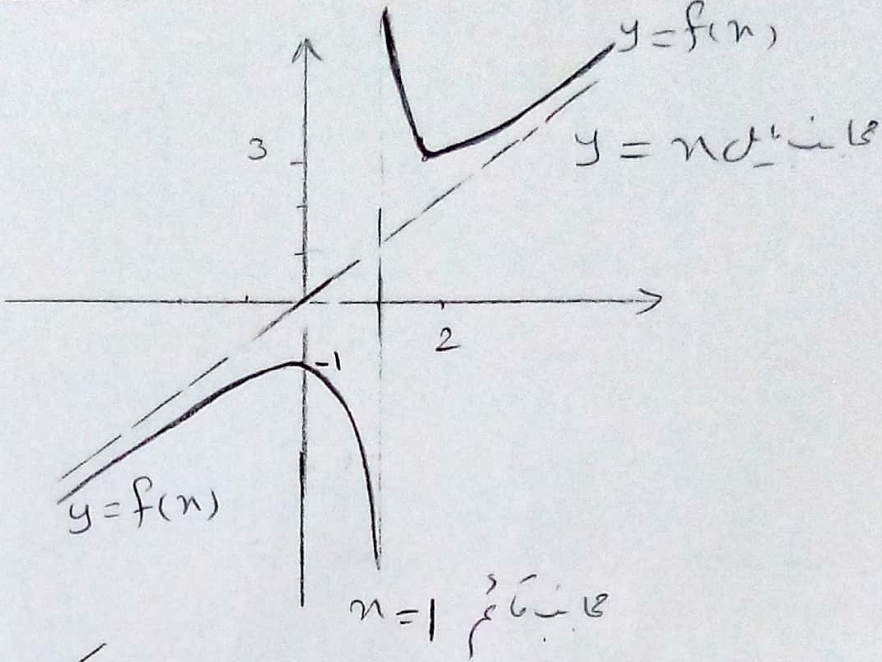
$$\frac{(2x-2)(x-1)-2(x^2-2x)}{(x-1)^3}=\frac{2x^2-2x-2x+2-2x^2+4x}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^3}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y''	$-$	‖	$+$
y	$\cap$	‖	$\cup$

$\Longrightarrow$ نقطه عطف ندارد

۱۴۴

x	y	
0	-1	max
$\pm\infty$	$\pm\infty$	
1	$\pm\infty$	
2	3	min



تمرین: نمودار توابع زیر را بطور دقیق رسم کنید.

$y=x^3-x^5$ ، $y=\frac{\sin(2x)}{2}+\cos(x)$ ، $y=\frac{x^2}{x-1}$ ، $y=\frac{3x}{x^2-4}$ ، $y=\frac{x^4}{(1+x)^3}$

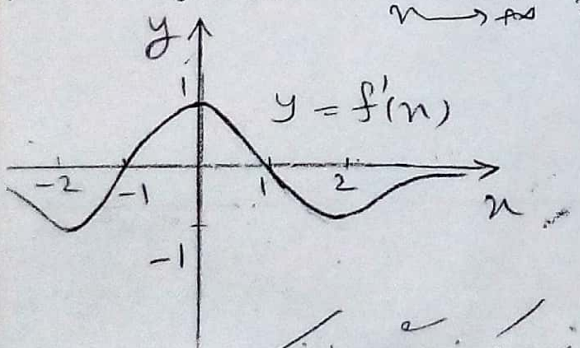
$y=\sqrt{x}-\sqrt{4-x}$ ، $y=\sqrt[3]{x}$ ، $y=\sqrt[3]{x(4-x)}$ ، $y=x-\sin(x)$ ، $y=\frac{x^3}{x^2-1}$

$y=x^6-3x^4+3x^2-5$ ، $y=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1}$ ، $y=\frac{2x^3}{x^2-4}$ ، $y=\frac{1-x^3}{x^2}$

$y=x+\ln(x^2-1)$ ، $y=x^2\ln(x+2)$ ، $y=x^3e^{4x}$ ، $y=\sin^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ ،

$y=\frac{1}{x}+4x^2$ ، $y=\ln(x)$ ، $y=x^x$ ، $y=5x^{2/3}-x^{5/3}$

تمرین: نمودار تابعی را رسم کنید که
اولاً: فرد باشد. ثانیاً، $f(1)=2$ ، $f(2)=1$ ، $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\frac{1}{2}$ ، ثالثاً f' دارای نمودار
زیر باشد.



تمرین: نمودار تابع f را در نزدیکی نقطه $x=-1$ رسم کنید اگر بدانیم که
$f(-1)=2$ ، $f'(-1)=-1$ و $f''(-1)=0$ ، $f'''>0$.

کاربرد سوم مشتق، قانون هوپیتال

به کمک مشتق گیری، روشی توانایی برای رفع ابهام به دست می آید که در اغلب موارد در محاسبات عادی هم بکار می رود.

قضیه، قانون هوپیتال در حالت $\frac{0}{0}$

اگر توابع f و g هر دو در بازه (a,b) مشتق پذیر باشند در این بازه $g'(x)\neq 0$ برای هر x باشد و $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)=0$ ، $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود باشد آنگاه

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال ۱

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x}=$$

$$\frac{1}{2}\times\lim_{x\to}\frac{\sin(x)}{x}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$$

توضیح ۱

الف: قانون هوپیتال را علاوه بر حالت $\frac{0}{0}$ در حالت $\frac{\infty}{\infty}$ نیز می توان بکار برد یعنی اگر f و g هر دو در بازه (a,b) مشتق پذیر و $g'(x)\neq 0$ برای هر $x\in(a,b)$ و $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} g(x)=\pm\infty$ و $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود باشد آنگاه

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

مثال ۱

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-2}{x^2-5x+8}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{6x+4}{2x-5}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{6}{2}=3$$

ب: قوانین هوپیتال را می توان در حالت حدهای یکطرفه یعنی مثلاً $x\to c^+$ یا $x\to c^-$ نیز بکار برد.

مثال ۱

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{tg(x)}{\sqrt{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sec^2(x)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^+}2\sqrt{x}\sec^2(x)=2\times 0\times 1=0$$

۲) از قانون‌های هوپیتال می‌توان برای $\infty-\infty$ و $\infty\times 0$ یا $0\times\infty$ نیز جهت رفع ابهام‌ها استفاده کرد.

$0\times\infty$

مثال ۱

$$* \lim_{x\to1}(1-x)\,tg(\tfrac{\pi}{2}x) = \lim_{x\to1}\frac{1-x}{ctg(\frac{\pi}{2}x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to1}\frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\csc^2(\frac{\pi}{2}x)} = \frac{-1}{-\frac{\pi}{2}\times1} = \frac{2}{\pi}$$

$$* \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} tg(x)-sec(x) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}-\frac{1}{\cos(x)} =$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)-0}{-\sin(x)} = \frac{0}{-1} = 0$$

> البته در حالت کلی، اطمینان وجود ندارد که لزوماً قانون هوپیتال کمک به حل یک مسئله (تعیین حد) نماید، فقط اگر $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود باشد.

بطور مثال $\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin(x)}{x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin(x)}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}$$

اگر به همین شکل قانون هوپیتال را برای مثال ۱ بکار ببریم خواهیم داشت

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos(x)}{1}$$ وجود ندارد

ولی بدون هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-\sin(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{\sin(x)}{x}\right) = 1-0 = 1$$

(قبلاً ثابت کرده‌ام $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x)}{x}=0$)

و یا گاهی ممکن است بکار بردن نابجای قانون هوپیتال و یا نادرست استفاده کردن از این قضیه منجر به یک دور شود.

مثال ۱

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg(x)}{sec(x)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sec^2(x)}{sec(x)\,tg(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{sec(x)}{tg(x)} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{tg(x)}{sec(x)} = \dots$$

در این مثال بدون کمک قانون هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{tg(x)}{sec(x)} = \lim_{x\to \pi/2} \frac{\sin(x)/\cos(x)}{1/\cos(x)} = \lim_{x\to \pi/2} \sin(x) =$$

$\sin(\pi/2) = 1$

همچنین در این مثال با تغییر ظاهر عبارت $\frac{tg(x)}{sec(x)}$ به صورت زیر داریم:

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{tg(x)}{sec(x)} = \lim_{x\to \pi/2} \frac{\frac{1}{cotg(x)}}{\frac{1}{\cos(x)}} = \lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos(x)}{cotg(x)} \overset{0/0}{=} \lim_{x\to \pi/2} \frac{-\sin(x)}{-\csc^2(x)}$$

$$= \lim_{x\to \pi/2} \sin^3(x) = 1^3 = 1$$

و نیز گاهی اگر به غلط از قوانین هوپیتال استفاده کنیم یعنی غیر از حالت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$، کار برد غلط هستند، جواب غلط هم ایجاد می کنند و بنابراین باید در بکار بردن این قضیه حتماً دقت کرد که حالت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ باشد

مثال:

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos(x)}{x+2} = \frac{\cos(\pi/2)}{\pi/2+2} = 0$$

اگر به غلط در این مثال از قانون هوپیتال استفاده کنیم حاصل می شود

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos(x)}{x+2} = \lim_{x\to \pi/2} \frac{-\sin(x)}{1+0} = \frac{-1}{1} = -1$$

که خطا است

تمرین: حدهای زیر را حل کنید

$$\lim_{x\to 0} cotg(x) - \csc(x), \quad \lim_{x\to 7} \frac{x^2-15x+56}{x^2-3x-28}, \quad \lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{1+2x}}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x+\sqrt{x}}{2x+1}, \quad \lim_{x\to \infty} x\sin(\tfrac{1}{x}), \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}, \quad \lim_{x\to 0} x\,cotg(2x)$$

۱۷۵

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x-\operatorname{tg}(x)}, \quad \lim_{x\to 0} \operatorname{cotg}^2(x)-\frac{1}{x^2}, \quad \lim_{x\to \pi/4} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{\operatorname{cotg}(\pi/4-x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3}, \quad \lim_{x\to \pi/2} \frac{\cos(x)}{\operatorname{cotg}(x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x+x^2}$$

$$\lim_{x\to \pi/2} \frac{\sec(x)}{1+\operatorname{tg}(x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x\operatorname{tg}(x)}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)-3x+x^2}{\sin(x)\sin(2x)}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{cotg}(x)}{\csc(x)}, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sin(\sqrt{x})}$$

$$\lim_{x\to +\infty} x-\sqrt{x^2+x}$$

به کمک قانون

هوپیتال

۱۷۱ مسائل برگزیده درس ریاضی پیش دانشگاهی
از کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال (توماس)

① مقادیر زیر را تعیین کنید:

$\cos^2(\pi/8)$, $\cos^2(\frac{5\pi}{12})$, $\sin^2(\frac{\pi}{12})$, $\sin^2(\frac{3\pi}{8})$, $\sin(\frac{7\pi}{12})$, $\cos(\frac{\pi}{12})$

$\cos(\frac{11\pi}{12})$, $\sin(\frac{5\pi}{12})$

② معادلات زیر را برحسب α حل کنید.

$\sin^2(\alpha)=3/4$, $\sin^2(\alpha)=\cos^2(\alpha)$, $\sin(2\alpha)-\cos(\alpha)=0$,

$\cos(2\alpha)+\cos(\alpha)=0$

③ دوره تناوب توابع زیر را تعیین کنید.

$y=\sin(2x)$, $y=\cos(\frac{\pi}{2}-x)$, $y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$

④ توابع زیر را از نظر زوج یا فرد بودن بررسی کنید.

$y=1+x^2$, $y=\sec(x)\,tg(x)$, $y=\frac{x^4+1}{x^3+x^5}$, $y=x+\cos(x)$

$y=x\cos(x)$

⑤ دامنه و برد توابع زیر را مشخص کنید.

$y=-2+\sqrt{1-x}$, $y=\sqrt{16-x^2}$, $y=3^{2-x}+1$, $y=\sqrt[5]{x^2}$

$y=Ln(x-3)+1$, $y=\sqrt[3]{2-x}-1$, $y=tg(2x-\pi)$

$$y=\begin{cases}-x-2 & -2<x\leq -1\\ x & -1<x<1\\ 2-x & 1\leq x\leq 2\end{cases}$$

⑥ ضابطه و نمودار تابع $y=f\circ f(x)$ را تعیین و رسم کنید هرگاه

$$f(x)=\begin{cases}-x-2 & -4\leq x\leq -1\\ -1 & -1<x\leq 1\\ x-2 & 1<x\leq 2\end{cases}$$

⑦ به کمک نمودار $y=\sin(x)$, $y=\cos(x)$ نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$y=2\cos(x-\pi/3)$, $y=1+\sin(x+\pi/4)$, $y=\cos(\pi/2\, x)$

⑧ نمودار رابطه $|x|+|y|=x+1$ را رسم کنید.

۹) حدهای زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3}{1+\sqrt{3x+1}},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5x+4}-2}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x^3+8x^2}{3x^4-16x^2},\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^4-16},\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x\sin(x)},\quad \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos(x))}{x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{3-3\cos(x)},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x},$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(x)}{\sin(\sqrt{x})},\quad \lim_{x\to -2}\frac{(x+3)|x+2|}{x+2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{x\csc(2x)}{\csc(5x)},$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sin(3y)\operatorname{cotg}(5y)}{y\operatorname{cotg}(4y)},\quad \lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{x+\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{tg}(x)-2\sec(x)}\right)$$

۱۰) تعیین کنید توابع زیر در چه نقاطی از $\mathbb{R}$ پیوسته اند.

$$y=\frac{x+1}{x^2-4x+3},\quad y=\frac{1}{1+|x|}-\frac{x^2}{2},\quad y=\begin{cases}\frac{x^2-x-6}{x-3} & x\neq 3\\ 5 & x=3\end{cases}$$

۱۱) تعیین کنید به ازای چه مقادیری از a , b تابع f با ضابطه زیر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$f(x)=\begin{cases}-2 & x\leqslant -1\\ ax-b & -1<x<1\\ 3 & x\geqslant 1\end{cases}$$

۱۲) توسیع پیوسته ای از توابع زیر را بنویسید.

$$y=\frac{\sin(x)}{|x|},\quad y=(1+2x)^{1/x}$$

۱۳) پاسخ حدهای زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{-1}-x^{-4}}{x^{-2}-x^{-3}},\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt[3]{x}},\quad \lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+}\sec(x)$$

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}}\sec(x),\quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2-3x+2}{x^3-4x},\quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^3-4x},\quad \lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{2-2\cos(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2},\quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg}(x))}{\operatorname{tg}(x)},\quad \lim_{x\to\infty}\sqrt{9x^2-x}-3x$$

۱۳) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+25}-\sqrt{x^2-1}$

۱۴) مطلوب، مجانب‌های نمودار توابع زیر را تعیین کنید.

$y=\frac{x^3+1}{x^2}$, $y=\sqrt{\frac{x^2+9}{9x^2+1}}$, $y=\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x+4}}$, $y=\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$

$y=\sqrt{x^2+2x}$, $y=x+x\sin(\frac{1}{x})$

۱۵) معادله خط مماس بر نمودار توابع زیر را در نقاط داده شده تعیین کنید.

$f(x)=x+9/x$: در نقطه‌ای به طول -3

$f(x)=\frac{x+3}{1-x}$: در نقطه‌ای به طول -2

۱۶) مشتق توابع زیر را حساب کنید.

$y=2(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x})$, $y=\sin(x)+\cos(x)\times\sec(x)$, $y=\sin(\frac{x}{\sqrt{1+x}})$

$y=\frac{\cos(x)}{x}+\frac{x}{\cos(x)}$, $y=(2-x)tg^2(x)$, $y=\cos^4(\sec^2(3x))$

$y=3x(2x^2-5)^4$, $y=\sqrt{3x^2-4x+6}$

۱۷) به کمک مفهوم مشتق $\lim_{x\to 1}\frac{x^{50}-1}{x-1}$ را تعیین کنید.

۱۸) مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع f روی اعداد حقیقی مشتق‌پذیر باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & x>-1 \\ bx^2-3 & x\leq -1 \end{cases}$$

۱۹) مشتق گیری زیر (y' را بدست آورید).

$y\sin(\frac{1}{y})-1=xy$, $x^3=\frac{2x-y}{x+3y}$, $y^2=\frac{x-1}{x+1}$, $tg(xy)=-x$

۲۰) معادله خط مماس و خط قائم بر منحنی‌های زیر را در نقاط داده شده تعیین کنید.

$x^2-\sqrt{3}\,xy=5-2y^2$: $(\sqrt{3}, 2)$

$y=2\sin(\pi x-y)$: $(1, 0)$

۲۱) معادله خط مماس توابع زیر را در نقطه $x=0$ تعیین کنید.

$y=\sqrt[3]{(1-\frac{1}{2+x})^2}$, $y=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $y=(1-x)^6$

(۳۲) نقاط بحرانی نمودار توابع زیر را تعیین کرده و همچنین در اکسترمم نسبی بودن آنها تحقیق کنید.

$$y=\sqrt{2x-x^2}\ ,\quad y=x(4-x)^3\ ,\quad y=x^2\sqrt{3-x}$$

$$y=\begin{cases}-x^2+4-2x & x\leq 1\\ -x^2+6x-4 & x>1\end{cases}$$

(۳۳) نمودار توابع زیر را بطور دقیق رسم کنید.

$$y=\frac{x^2-4}{x^2-2}\ ,\quad y=\frac{x}{x^2-1}\ ,\quad y=\frac{x^2-x+1}{x-1}\ ,\quad y=x\sqrt{3-x}$$

$$y=\sqrt[3]{x}\,(x-4)\ ,\quad y=x-3\sqrt[3]{x^2}\ ,\quad y=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-1}$$

(۳۴) نقطه c مربوط به قضیه مقدار میانگین را در توابع زیر با بازه های داده شده تعیین کنید.

$y=x^3-x^2\ :\quad [-1,2]$ بازه

$$y=\begin{cases}x^3 & -2\leq x\leq 0\\ x^2 & 0<x\leq 2\end{cases}\qquad [-2,2]$$ بازه

(۳۵) معادلات و نامعادلات زیر را حل کنید.

$$\left|5-\frac{2}{x}\right|<1\ ,\quad \left|\frac{x+1}{2}\right|\geq 1\ ,\quad (x-1)^2\leq 4\ ,\quad z^3=-8i$$

$(3+4i)^2-2(x-iy)=x+iy$ (x,y عدد حقیقی) , $x^4+4x^2+16=0$ در دستگاه اعداد مختلط

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2+\frac{1}{x-iy}=1+i$ (x,y عدد حقیقی اند)

(۳۶) ناحیه های زیر را رسم کنید.

$x^2+6y+y^2<0\ ,\ y>-3$

$y=-x^2-6x-5$

$|z+i|=|z-1|$

$|z+1|\geq|z|$

منابع تهیه جزوه

۱- حساب دیفرانسیل و انتگرال جلد اول قسمت اول
تألیف: توماس ترجمه: خادمی - مجلسی

۲- حساب دیفرانسیل و انتگرال جلد اول (قسمت اول و قسمت دوم)
تألیف: لیتهولد ترجمه: رزاق - ناظمی - کاظمی - بهزاد

۳- حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع یک متغیره
تألیف: زنگنه - نادری نشر دانشگاه صنعتی اصفهان

۴- حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسهٔ تحلیلی جلد اول
تألیف: سیلورمن ترجمه: عالم‌زاده

۵- ریاضیات عمومی جلد اول
تألیف: اسحاک مارون ترجمه: یارباب

۶- ریاضیات پیش‌نیاز (پیش دانشگاهی)
تألیف: سلطان‌زاده - گازر

۷- متغیرهای مختلط و کاربرد آنها
تألیف: چرچیل - براون - ورهی ترجمه: خسروی